



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

15 februarie 2015

Clasa a VIII-a

1. a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstrați că

$$a+b-c^2 + a-b+c^2 + -a+b+c^2 + a+b+c^2 = 4a^2 + b^2 + c^2.$$

b) Să se demonstreze că numărul $A = 22^{22} + 44^{44} + 66^{66}$ se poate scrie ca o sumă de patru numere naturale nenule pătrate perfecte.

2. Determinați mulțimea $I = -\infty; a \cap [a^{-1}; \infty$, $a \in \mathbb{R}$.

3. Fie M un punct exterior planului trapezului $ABCD$ ($AD \parallel BC$), iar E, F proiecțiile lui pe dreptele AD , respectiv BC .

a) Demonstrați că $(MEF) \perp (ABC)$;

b) Dacă distanțele de la M la bazele trapezului sunt de $6\sqrt{3}$ cm, iar măsura diedrului format de planele (MAD) și (MBC) este de 60° , calculați distanța de la M la planul (ABD) .

4. Se consideră cubul $ABCDMN PQ$ cu lungimea muchiei egală cu 5. Planul (ANQ) intersectează planele (MBC) , (MCD) , (MDB) după dreptele d_1, d_2 , respectiv d_3 .

a) Arătați că dreptele d_1, d_2, d_3 sunt concurente două câte două.

b) Demonstrați că aria triunghiului format de cele trei drepte este mai mică decât 2.

Notă

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10 (1 punct din oficiu).
- Timp de lucru: 3 ore

Soluții clasa a VIII-a:

1. a) Prin calcul avem:

$$\begin{aligned} & a+b-c^2 + a-b+c^2 + -a+b+c^2 + a+b+c^2 = \\ & = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc + a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc + \\ & + a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc + a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = \\ & = 4a^2+b^2+c^2. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} A &= 22^{22} + 44^{44} + 66^{66} = 4 \cdot 2^{20} \cdot 11^{22} + 2^{86} \cdot 11^{44} + 2^{64} \cdot 33^{66} = 4 \left[2^{10} \cdot 11^{11^2} + 2^{43} \cdot 11^{22^2} + 2^{32} \cdot 33^{33^2} \right] = \\ &= a+b-c^2 + a-b+c^2 + -a+b+c^2 + a+b+c^2 \\ \text{unde } a &= 2^{10} \cdot 11^{11}, b = 2^{43} \cdot 11^{22}, c = 2^{32} \cdot 33^{33}. \end{aligned}$$

2. Condiția de existență: $a \neq 0$;

$$a = a^{-1} \Rightarrow a = \pm 1.$$

Cazul I

$$\text{Dacă } a \in (-\infty; -1) \Rightarrow I = (-\infty; -1) \cap (-1; \infty) \Rightarrow I = \emptyset;$$

Cazul II

$$\text{Dacă } a \in (-1; 0) \Rightarrow I = -\infty; a \cap [a^{-1}; \infty] = [a^{-1}; a];$$

Cazul III

$$\text{Dacă } a \in (0; 1) \Rightarrow I = \emptyset;$$

Cazul IV

$$\text{Dacă } a \in (1; \infty) \Rightarrow I = -\infty; a \cap [a^{-1}; \infty] = [a^{-1}; a];$$

Cazul V

$$\text{Dacă } a = -1 \Rightarrow I = \{-1\};$$

Cazul VI

$$\text{Dacă } a = 1 \Rightarrow I = \{1\};$$

3. a) Fie $MO \perp (ABCD)$. Cum $ME \perp AD$ rezultă conform Teoremei celor 3 perpendiculare că $OE \perp AD$ (1).

Din $MO \perp (ABCD)$ și $MF \perp BC$ rezultă conform T.3.1 că $OF \perp BC$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că E, O, F coliniare. Deci $MO \subset (MEF)$,

$$MO \perp (ABC) \Rightarrow (MEF) \perp (ABC).$$

b) Notăm $MN = (MAD) \cap (MBC)$. Dacă prin două drepte paralele trec două plane care se intersectează după o dreaptă MN , atunci

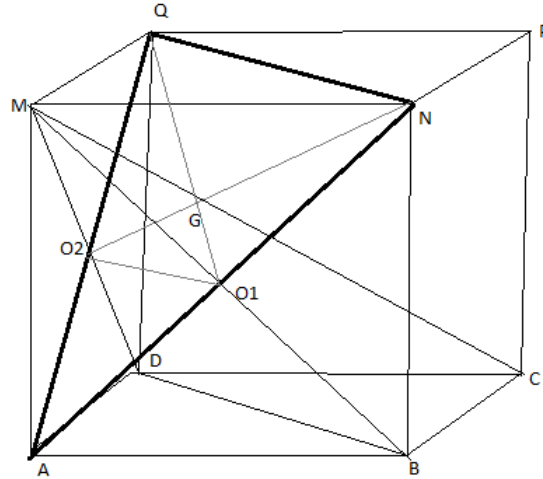
$$MN \parallel AD \text{ și } MN \parallel BC;$$

$$ME \perp AD, MN \parallel AD \text{ deci } EM \perp MN.$$

$MF \perp BC, MN \parallel BC$, deci $MF \perp MN$, rezultă $\angle EMF$ este unghiul plan corespunzător diedrului format de (MAD) și (MBC) .

$\triangle MEF$ este triunghi isoscel cu un unghi de 60° , rezultă că $\triangle MEF$ este echilateral cu latura de $6\sqrt{3}$ cm. Deci $d(M, ABD) = MO = 9$ cm.

4.



a) Fie O_1 centrul feței ABNM și O_2 centrul feței ADQM.

$MQ \parallel BC \Rightarrow Q \in MBC$, $Q \in ANQ$ deci $Q \in MBC \cap ANQ$ 1.

$O_1 \in MB, MB \subset MBC \Rightarrow O_1 \in MBC$; $O_1 \in AN, AN \subset ANQ \Rightarrow O_1 \in ANQ$, deci $O_1 \in MBC \cap ANQ$ 2.

Din (1) și (2) rezultă $MBC \cap ANQ = QO_1 = d_1$.

$MN \parallel CD \Rightarrow N \in MCD$, $N \in ANQ$ deci $N \in MCD \cap ANQ$ 3.

$O_2 \in MD, MD \subset MCD \Rightarrow O_2 \in MCD$; $O_2 \in AQ, AQ \subset ANQ \Rightarrow O_2 \in ANQ$, deci $O_2 \in MCD \cap ANQ$ 4.

Din (3) și (4) rezultă $MCD \cap ANQ = NO_2 = d_2$.

$O_1 \in MB, MB \subset MDB \Rightarrow O_1 \in MDB$; $O_1 \in AN, AN \subset ANQ \Rightarrow O_1 \in ANQ$, deci $O_1 \in MDB \cap ANQ$ 5.

$O_2 \in MD, MD \subset MDB \Rightarrow O_2 \in MDB$; $O_2 \in AQ, AQ \subset ANQ \Rightarrow O_2 \in ANQ$, deci $O_2 \in MDB \cap ANQ$ 6.

Din (5) și (6) rezultă $MDB \cap ANQ = O_1O_2 = d_3$.

În triunghiul ANQ, d_1 și d_2 sunt mediane, iar O_1O_2 este linie mijlocie, deci d_1, d_2, d_3 sunt concurente două câte două.

b) Triunghiul ANQ este echilateral cu latura de $5\sqrt{2}$ cm. Fie $QO_1 \cap NO_2 = G$. Din $O_1O_2 \parallel NQ$ rezultă:

$$A_{\Delta O_1O_2G} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta QNG} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta ANQ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{2}^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{24} < 2.$$

Barem de corectare

Clasa a VIII-a

Problema 1	Oficiu	1 p
a) $a+b-c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$		1p
$a-b+c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$		1p
$-a+b+c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$		1p
$a+b+c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$		1p
Finalizare		1p
b) $A = 4 \left[2^{10} \cdot 11^{11^2} + 2^{43} \cdot 11^{22^2} + 2^{32} \cdot 33^{33^2} \right]$		2p
$A = a+b-c^2 + a-b+c^2 + -a+b+c^2 + a+b+c^2$		2 p
unde $a = 2^{10} \cdot 11^{11}, b = 2^{43} \cdot 11^{22}, c = 2^{32} \cdot 33^{33}$		
TOTAL		10p

Problema 2	Oficiu	1 p
Condiția de existență		1 p
$a = a^{-1} \Rightarrow a = \pm 1$		2 p
Cazul I		1p
Cazul II		1p
Cazul III		1p
Cazul IV		1p
Cazul V		1p
Cazul VI		1p
TOTAL		10p

Problema 3	Oficiu	1 p
a) $OE \perp BC$ (T.3. \perp)		1p
$OF \perp BC$ (T.3. \perp)		1p
E, O, F coliniare		1p
$(MEF) \perp (ABC)$		1p
b) $MN \parallel AD$ și $MN \parallel BC$		1p
$ME \perp AD, MN \parallel AD$ deci $EM \perp MN$		1p
$MF \perp BC, MN \parallel BC$ deci $MF \perp MN$		1p
$\angle EMF$ este unghiul plan corespunzător diedrului format de (MAD) și (MBC)		1p
$d(M, ABD) = MO = 9cm$		1p
TOTAL		10p

Problema 4	Oficiu 1 p
a) $MBC \cap ANQ = QO_1 = d_1, O_1$ centrul feței $ABNM$	1p
$MCD \cap ANQ = NO_2 = d_2, O_2$ centrul feței $ADQM$	1 p
$MDB \cap ANQ = O_1O_2 = d_3$	1p
În triunghiul ANQ , d_1 și d_2 sunt mediane, iar O_1O_2 este linie mijlocie, deci d_1, d_2, d_3 sunt concurente două câte două.	1p
b) $A_{\Delta O_1O_2G} = \frac{1}{4} \cdot A_{\Delta QNG}$, unde $QO_1 \cap NO_2 = G$	2p
$A_{\Delta O_1O_2G} = \frac{25\sqrt{3}}{24} \text{ cm}$	2p
$\frac{25\sqrt{3}}{24} < 2$	1p
TOTAL	10p